Об интегрировании в конечном виде дифференциальных биномов в случае иррациональных показателей.

§ 1. Еще математикам XVIII века были известны *достаточные* условия выражаемости в конечном виде с помощью элементарных трансцендентных интеграла дифференциального бинома

$$J=\int x^m(a+bx^n)^p\,dx\ ,$$

состоящие в том, что имеет место один из следующих случаев:

$$1)\ p \quad \text{целое число},$$

$$2)\ \frac{m+1}{n} \quad \text{целое число},$$

$$3)\ \frac{m+1}{n}+p \quad \text{целое число}.$$

П. Л. Чебышеву [1]) удалось доказать и *необходимость* этих условий, но только для *рациональных* m. n. В настоящей работе я делаю дополнение к этому результату, выводя *достаточное* и *необходимое* условие интегрируемости в конечном виде дифференциального бинома в случае *иррациональных* показателей. Как это вытекает из моей большой работы [2]), интегрирование рациональных трансцендентных построений вообще проще интегрирования иррациональных алгебраических функций и задачу об интегрировании в конечном виде таких построений можно решить *конечным* числом алгебраических операций (доказательство в моей работе проведено вполне только для построений первого класса, но легко видеть каким образом строится и общее доказательство). Совершенно иначе дело обстоит, если в трансцендентном построении содержатся иррациональности. Здесь возникают очень серьезные затруднения. Интеграл J, как ниже увидим, сводится к интегралу с *иррациональным* p или к интегралу с *рациональными* m, n, p.

Это конечно значительно упрощает дело, так как в случае рациональных m, n мы можем надлежаще выбранной подстановкой исключить иррациональность, а в случае иррациональных m, n будем иметь рациональное трансцендентное построение с основными трансцендентными

$$\text{1-го класса}\quad x^m,\ x^n\ ,$$

$$\text{2-го класса}\quad (a+bx^n)^p\ .$$

---

[1]) П Чебышев. Sur l'intégration des différentielles irrationnelles. Journal de Liouville 1 s. t. XVIII 1853. Сочинения т. I стр. 145.

[2]) Об интегрировании в конечном виде трансцендентных функций. Известия Варшавского Университета за 1913 год.

Таким образом выявляется возможность приложения к интегралу J методов нашей работы.

Но в чистоте все эти методы следует прилагать к *численным* заданиям, если же параметры остаются неопределенными, то они оказываются крайне сложными. При буквенных примерах следует пользоваться искусственными приемами, как мы и поступаем в нашей работе при рассмотрении интеграла дифференциального бинома.

§ 2. Мы начинаем с простейшего случая, когда p *иррационально*, $m=\frac{\nu}{\omega}$, $n=\frac{\delta}{\omega}$ *рациональны.*

Тогда согласно классификации Liouville'я [1]), несколько мной видоизмененной, подинтегральная функция *трансцендентная первого класса.*

Полагая
$$x^{\frac{1}{\omega}}=z,\ x=z^{\omega},\quad dx=\omega z^{\omega-1}dz,$$

интеграл J приводится к виду
$$\int z^{\varepsilon}(a+bz^{\delta})^p\,dz,$$

$\varepsilon=\nu+\omega-1$ и δ целые числа, p иррационально.

Мы будем всегда исключать случаи вырождения, когда одно из чисел: a, b, p, n равно нулю.

Согласно результатам, полученным в моей большой работе [2]) в случае интегрируемости в конечном виде:
$$\int z^{\varepsilon}(a+bz^{\delta})^p dz=(a+bz^{\delta})^p\,\vartheta+C, \tag{1}$$

где ϑ *рациональная функция от* z
$$z^{\varepsilon}(a+bz^{\delta})=\vartheta'\ (a+bz^{\delta})+p\delta bz^{\delta-1}\vartheta. \tag{2}$$

Прежде всего докажем, что ϑ не только рациональная, но даже и *целая* функция, т. е. может обладать единственным полюсом $z=\infty$.

С этой целью полагаем
$$\vartheta=\frac{A}{(z-a)^k}+\ldots\ \vartheta'=-\frac{Ak}{(z-a)^{k+1}}+\ldots,$$

где A постоянное, k целое положительное число.

Тогда уравнение (2) дает
$$z^{\varepsilon}(a+bz^{\delta})=-\frac{Ak(a+bz^{\delta})}{(z-a)^{k+1}}+\ldots\frac{p\delta bz^{\delta-1}A}{(z-a)^k}+\ldots$$

---

[1]) Liouville. Mémoire sur la classification des transcendantes. Journal de Liouville t. II 1837 p. 53. 1838. p. 523.

[2]) Об интегрировании трансцендентных функций; глава I § 36. Вывод этой простой схемы вовсе не предполагает всю полноту рассуждений этой работы до § 36. Достаточно для этого то, что дается Liouville'ем в его работах в Journal de Liouville, t. II 1837 p. 53. t. II 1838; Journal de Crelle XIII и др. литературе по интегрированию в конечном виде. См. мою работу Об интегрировании в конечном виде линейных диф. уравнений. Известия Варшавск. Униврс. 1910.

Положим сперва $a \gtrless 0$.

Приравнивая коэффициент при $\frac{1}{(z-\alpha)^{k+1}}$, имеем

$$a + b\alpha^{\delta} = 0,$$

а приравнивая при $\frac{1}{(z-a)^k}$

$$-k + p\delta = 0,$$

что невозможно вследствие иррациональности p.

Если $a = o$ и $\delta > o$, то к члену $\frac{1}{(z-a)^{k+1}}$ должны найти другой с тем же показателем, что предполагает $\varepsilon < o$ и кроме того

$$k = -\varepsilon - 1.$$

Значит ϑ или полином или же формы

$$z^{\varepsilon+1}\varphi,$$

где φ полином.

Если $\delta < o$, то следует вместо $\frac{1}{(z-\sigma)^{k+1}}$ взять

$$\frac{1}{(z-a)^{k-\delta+1}},$$

что даст $k = -\varepsilon - 1$ или $-k + p\delta = o$.

В первом случае получаем *ту же* форму, второй случай даст p рациональным, что невозможно. Определим теперь порядок рациональной функции ϑ. Полагая

$$\vartheta = A_e z^e + \ldots\ldots\ldots \vartheta' = eA_e z^{e-1} + \ldots,$$

где e высшая степень (которая при $z = \infty$ полюсе положительна, при $z = \infty$ нуле отрицательна);

из (2) получаем

$$z^{\varepsilon}(a + bz^{\delta}) = (eA_e z^{e-1} + \ldots)(a + bz^{\delta}) + p\delta b z^{\delta-1}(A_e z^e + \ldots). \tag{3}$$

Отсюда следует, что

$$\delta + e - 1 = \delta + \varepsilon,$$

ибо иначе имеем $e + p\delta = o$ и опять p рациональным.

Значит $\qquad e = \varepsilon + 1.$

Но тогда случай $\vartheta = z^{\varepsilon+1}\varphi$ предполагает $\varphi = C = \text{const}$.

Подставляя в (2), имеем

$$a + bz^{\delta} = [(\varepsilon + 1)(a + bz^{\delta}) + p\delta b z^{\delta}]\, C,$$

откуда выводим равенство одной из величины (p, δ, b) нулю противно поставленному выше ограничению.

Но, признав ϑ полиномом, из (3) выводим, что при $\delta > o$, ϑ должно разделиться на $(a + bz^{\delta})$.

Кроме того, мы должны еще утверждать, что все коэффициенты, начиная с A_e и кончая $A_{e-\delta+1}$ включительно должны быть нули, ибо иначе приравнивая коэффициенты при степенях $x^{k+\delta-s}$, мы получили бы

$$s + p\delta = o,$$

т. е. для p рациональное число,
или же $\quad e-\delta+s=\varepsilon \quad$ при $s<\delta-1$,
что при $e=\varepsilon+1$ невозможно.

Таким образом, полагая

$$\vartheta = A_e z^e + A_{e-\delta} z^{e-\delta} + \ldots,$$

убеждаемся, что

$$A_{e-\delta-1} = o \ldots \qquad A_{e-2\delta+1} = o, \ldots$$

Рассуждая таким же образом дальше, получаем

$$\vartheta = (a + bz^{\delta}) z^g \Phi(z^{\delta}),$$

где Φ целая функция от z^{δ}, причем

$$\delta + g < \varepsilon + 1$$
$$g < \varepsilon,$$

Полагая дальше

$$\int z^{\varepsilon}(a+bz^{\delta})^p dz = z^g (a+bz^{\delta})^{p+1} \Phi(z^{\delta}) + C, \tag{4}$$

выводим дифференцированием, что при $g > 1$

$$z^{\varepsilon} = g z^{g-1} \alpha(z) + z^g \beta(z), \tag{4'}$$

где
$$\alpha(z) = (a + bz^{\delta}) \Phi(z^{\delta})$$

не делится на z.

Представляя последнее (4′) в виде уравнения

$$z^{\varepsilon - g + 1} = g\alpha(z) + z\beta(z),$$

в котором первый член левой части и второй правой делятся, а первый правой не делится на z, заключаем, что $g = o$ и поэтому $\varepsilon + 1$ делится на δ т. е.

$$\varepsilon + 1 = \lambda\delta, \tag{5}$$

где λ целое положительное число.

Представляя при $\delta < o$ ур. (3) в виде

$$z^{\varepsilon}(az^{-\delta} + b) = (eA_e z^{e-1} + \ldots)(az^{-\delta} + b) + p\delta b z^{-1}(A_e z^e + \ldots), \tag{3'}$$

точно таким же образом приходим к форме

$$\vartheta = (az^{-\delta} + b) z^g \Phi(z^{-\delta})$$

и выводим уравнение (5).

Легко видеть, что в этом случае интегрирование, действительно, выполняется в конечном виде. А именно, полагая в интеграле

$$\int z^{\lambda\delta-1}(a + bz^{\delta})^p dz$$

$z^{\delta} = u$, приводим его к интегралу

$$\int u^{\lambda-1}(a+bu)^p du,$$

который применением *многократным интегрирования по частям* приводится к интегралу

$$\int (a + bu)^{p+\lambda-1} du = \frac{(a+bu)^{p+\lambda}}{b(p+\lambda)} + C.$$

Таким образом *единственным случаем интегрируемости дифференциального бинома в случае иррациональности* p *и рациональных* m, n *является* $m+1=\lambda n$,

т. е. $\dfrac{m+1}{n}$ *= целому положит числу.*

Пример:

$$\int \sqrt[3]{x}\,(1+\sqrt{x})^{\sqrt{2}-1}\,dx$$ не берется в конечном виде, но

$$J=\int \sqrt[3]{x}\,(1+\sqrt[3]{x^2})^{\sqrt{2}-1}\,dx$$ берется в конечном виде, причем равен

$$J=\frac{3}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}\left(\sqrt{2}\,\sqrt[3]{x^2}-1\right)(1+\sqrt[3]{x^2})^{\sqrt{2}}+C.$$

§ 3. Во вторую очередь рассмотрим случай, когда p *и* m *иррациональны, а* n *рационально.*

Тогда имеем схему

$$\int z^{\varepsilon}\,(a+bz^{\delta})^{p}\,dz=(a+bz^{\delta})^{p}z^{\varepsilon+1}\vartheta \tag{6}$$

где ε иррационально, ϑ рациональная функция от z, δ целое число.

Что ϑ*—полином* z—это устанавливается совершенно так же, как в § 2 при ε целом.

Полагая $\vartheta=A_k z^k+A_{k-1}\,z^{k-1}+\dots$

в уравнении, полученном дифференцированием (6)

$$a+bz^{\delta}=z\,(a+bz^{\delta})\,\vartheta'+p\delta bz^{\delta}\,\vartheta+(\varepsilon+1)\,(a+bz^{\delta})\vartheta \tag{7}$$

и приравнивая коэффициент при высшей степени z, получаем

$$k+p\delta+\varepsilon+1=0\,,$$

так что $\qquad p\delta+\varepsilon=-k-1.$

Интеграл (6) приводится к интегралу

$$J=\int (az^{-\delta}+b)^{p}z^{-k-1}\,dz$$

уже с *целыми показателями* $-\delta$, $-k-1$.

На основании предыдущего § должны иметь,

$$-k=-\lambda\delta,$$

где λ целое положительное число

$$\varepsilon=-p\delta-\lambda\delta-1$$

$$J=\int (az^{-\delta}+b)^{p}\,z^{-\lambda\delta-1}\,dz=\frac{1}{\delta}\int (au+b)^{p}\,u^{\lambda-1}\,du,$$

если положить

$$z^{-\delta}=u$$

Но последний интеграл находится *по частям.* Таким образом

$$m\omega+\omega-1=-pn\omega-\lambda n\omega-1\,,$$

$$\frac{m+1}{n}+p=-\lambda=\text{отриц. целое число.}$$

Единственным случаем интегрируемости в случае m, p иррациональных является случай, когда $\frac{m+1}{n}+p=$ *отриц. целому числу.*

Пример: $\int x^{\sqrt{3}}(5-7x^2)^{\sqrt{5}}\,dx$ не берется в конечном виде.

§ 4. Отложим пока случай, когда *p и n иррациональны, а $m=\frac{\nu}{\omega}$ рационально*, и займемся случаем, когда все три числа *p, m, n иррациональны*, но пока только в предположении, что *между x^m, x^n нет алгебраической зависимости.*

Согласно моим исследованиям последнее предполагает, что $x^{\alpha m}\,x^{\beta n}=$алг. фун. ($\alpha$, β рациональны) или что то же $\alpha m+\beta n=\gamma=$ рац. числу. (11)

Подинтегральная функция теперь не первого, а уже *второго класса* и мы имеем схему:

$$\int x^m\,(a+bx^n)^p\,dx=(a+bx^n)^p\,\vartheta,$$

где ϑ рациональная функция $\zeta=x^m$, $\eta=x^n$.

Дифференцирование дает

$$\zeta\,(a+b\eta)=(a+b\eta)\vartheta'+\frac{pnb\vartheta\eta}{x} \tag{12}$$

По подстановке выражения ϑ через ζ, η это уравнение удовлетворяется *тожественно* относительно ζ, η, так как по условию между ζ, η не существует алгебраического соотношения.

Сперва докажем, что *ϑ совсем не содержит ζ*. С этой целью докажем, что ϑ, как функция ζ, не может иметь ни конечных, ни безконечных полюсов.

Положим $\vartheta=\frac{A}{(\zeta-\alpha)^k}+\dots$,

где A рационально, а α алгебраическая функция η, имеем

$$\vartheta'=-\frac{kA\,(\zeta'-\alpha')}{(\zeta-\alpha)^{k+1}}+\dots=-\frac{kA(\frac{m}{x}\zeta-\alpha')}{(\zeta-\alpha)^{k+1}}+\dots$$

Для того, чтобы тожество

$$\zeta\,(a+b\eta)=(a+b\eta)\left[-\frac{kA(m\alpha-\alpha'x)}{x(\zeta-\alpha)^{k+1}}+\dots\right]+\frac{pnb\eta}{x}\,\frac{A}{(\zeta-\alpha)^k}+\dots$$

имело место необходимо, чтобы

$$m\alpha-\alpha'x=0 \quad \text{т. е.} \quad \alpha=x^m.$$

Но это невозможно, так как x^m трансценд. функция η.

Для $\zeta=\infty$ следует брать

$$\vartheta=A\zeta^k+\dots \quad A \text{ рац. ф. от } \eta$$

$$\vartheta'=\left(A'+\frac{kAm}{x}\right)\zeta^k+\dots$$

так как ур. (12) дает

$$\zeta\,(a+b\eta)=(a+b\eta)\left(A'+\frac{kAm}{x}\right)\zeta^k+\dots\ \frac{pnb\,A\zeta^k}{x}\eta+\dots$$

Если $k>1$, то взяв коэффициент при старшей степени ζ, имеем

$$(a+b\eta)\left(A'+\frac{Am}{x}\right)+\frac{pnbA}{x}\eta=0. \tag{13}$$

При $k=1$ имеем

$$(a+b\eta)=(a+b\eta)\left(A'+\frac{Am}{x}\right)+\frac{pnbA}{x}\eta=0. \tag{14}$$

Докажем теперь, что ни первое ни второе уравнение не может удовлетвориться A—рациональной функцией от η.

Полагая $A=\dfrac{\varkappa}{(\eta-\beta)^e}+\dots$

$$A'=-\frac{e\varkappa\left(\frac{n}{x}\eta'-\beta'\right)}{(\eta-\beta)^{e+1}}+\dots=-\frac{e\varkappa(n\beta-\beta' x)}{(\eta-\beta)^{e+1}}+\dots,$$

где $\varkappa$ рациональная функция от x, β алгебраическая функция от x.

Но приравняв коэффициент при старшем члене нулю, получаем или $\beta=x^n$, что невозможно, или же

$a+b\eta=b\ (\eta-\beta)$, $\beta=-\dfrac{a}{b}$, причем

$$-\left(\frac{n}{x}\beta-\beta'\right)e+\frac{pn}{x}\beta=0.$$

Последнее же уравнение дает при β *постоянном* p равным рациональному числу e.

Далее полагая

$$A=\varkappa\eta^e+\dots \quad \varkappa \text{ рац. ф. } x$$

$$A'=\left(\varkappa'+\frac{e\varkappa n}{x}\right)\eta^e+\dots,$$

имеем

$$(a+b\eta)\left[\varkappa'+\frac{e\varkappa n}{x}+\frac{m\varkappa}{x}\right]\eta^e+\frac{pnb}{x}\varkappa\eta^{e+1}+\dots=0$$

и приравнивая нулю коэффициент при старшей степени η, получаем

$$\varkappa'+\frac{en+m+np}{x}\varkappa=0$$

$$\eta=\frac{C}{x^{en+m+np}}$$

Для того, чтобы η было алгебраическим, необходимо, чтобы $en+m+np=$ рац. числу.

Этот случай мы можем отнести к случаю алгебраической зависимости между основными трансцендентными первого класса, если интеграл J представить в виде

$$\int x^{m+np}(ax^{-n}+b)^p dx.$$

Но, если ϑ не зависит от ζ, должны иметь

$$\zeta x=\frac{pnb\eta\vartheta}{a+b\eta}+x\vartheta',$$

чего быть не может так как ζ не может *алгебраически* выразиться через η.

Пример. На основании этого § можем утверждать, что

$$\int x^{\sqrt[3]{2}}\left(4-x^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{5}} dx$$

наверное не выражается в конечном виде с помощью элементарных трансцендентных.

§ 5. Обращаемся теперь к случаю алгебраической зависимости между x^m, x^n, когда

$$\alpha m+\beta n=\nu,$$

где α, β, ν можно, конечно, предполагать не только рациональными, но и целыми числами.

Интеграл тогда приводится к

$$\int x^{\frac{\nu}{\alpha}} y^{\frac{-\beta}{\alpha}}(a+b\eta)^p dx,$$

а подстановкой

$$\eta^{\frac{1}{\alpha}}=\omega,\ x^{\frac{1}{\alpha}}=z$$

к интегралу

$$\int z^{\nu+\alpha-1}\omega^{-\beta}(a+b\omega^\alpha)^p dz=(a+b\omega^\alpha)^p\vartheta,$$

где ϑ рациональная функция ω.

Дифференцирование дает

$$z^{\nu+\alpha-1}\omega^{-\beta}(a+b\omega^\alpha)=(a+b\omega^\alpha)\vartheta'+\frac{npb\omega^\alpha}{z}\vartheta.$$

Мы докажем, что в предположении, что $\frac{m+1}{n}$ не целое полож. число, $\frac{m+1}{n}+p$ не целое отриц. число, ϑ сводится к постоянному, а так как, при $\vartheta=\text{const.}$ мы будем иметь $a=o$, то интегрирование в конечном виде невозможно.

Невозможность полюса конечного легко устанавливается, положив

$$\vartheta=\frac{C}{(\omega-\delta)^k}+\ldots.$$

$$\vartheta'=-\frac{kC(\frac{n}{z}\omega\cdot\delta')}{(\omega-\delta)^{k+1}}+\ldots.=-\frac{kC(n\delta-\delta' z)}{z(\omega-\delta)^{k+1}}+\ldots$$

Подставляя в (15) и приравнивая коэффициент при $\frac{1}{(\omega-\delta)^{k+1}}$ нулю (что предполагает, что δ не корень уравнения $a+b\omega^\alpha=o$) имеем невозможное решение δ из уравнения $n\delta-\delta' z=o$.

Поэтому

$$\delta=\sqrt[\alpha]{-\frac{a}{b}} \tag{16}$$

но тогда приравнивание коэффициента при $\frac{1}{(\omega-\delta)^k}$ дает

$$-k(n\delta-\delta' z)+np\delta=o,$$

что невозможно, так как при решении (16) для δ дает для p рациональное значение.

Случаи $\omega = \infty$ и $\omega = o$ — полюсы можно рассматривать совместно, полагая

$$\vartheta = C\omega^k + D\omega^{k\mp 1} + \ldots..$$

причем для верхнего знака $k < o$, для нижнего $k > o$, предполагая разложение ϑ *обрывающимся.*

$$\text{Тогда} \qquad \vartheta' = (C' + \frac{kCn}{z})\omega^k + \ldots$$

$$z^{\nu+a-1}\omega^{-\beta}(a + b\omega^a) = (a + b\omega^a)(C' + \frac{kCn}{z})\omega^k + \ldots \frac{npab\omega^a}{z} C\omega^k + \ldots \tag{17}$$

Если $\beta < o$ в первом, $\beta > o$ во втором, что приравниванием нулю коэффициент при старшей степени ω имеем

$$C' + \frac{(k+pa)}{z} nC = o, \tag{18}$$

уравнение, которое может давать *алгебраическое* значение для C только при условии, что

$$(k + pa)n = \text{рац. числу}. \tag{19}$$

Если же в первом случае $\beta > o$, во втором $\beta < o$, то то же заключение делаем, кроме случая, когда

$$-\beta = k.$$

Тогда уравнение (18) заменяется другим

$$C' + \frac{(k + pa)n}{z} C = z^{\nu+a-1}, \tag{20}$$

которое имеет частное алгебраическое решение и при несоблюдении условия (19)

$C = \dfrac{z^{\nu+a}}{(k + p)n + \nu + a}$ а при соблюдении $C = Az^{\nu+1} + Cz^{-(k+pa)n}$.

Приравнивание нулю коэффициента при следующей степени в тожестве (17)

$$(a + b\omega^a)\left[\left(C' + \frac{kCn}{z}\right)\omega^k + \left(D' + \frac{(k \pm 1)Dn}{z}\right)\omega^{k\pm 1} + \ldots\right] + \ldots$$

$$+ \frac{npab}{z}\omega^a[C\omega^k + D\omega^{k\pm 1} + \ldots] = z^{\nu+a-1}\omega^{-\beta}(a + b\omega^a).$$

если этой степени нет в правой части и если a не равно ± 1 ($+$ отвечает отриц. k, — полож.), то

$$D' + \frac{(k \pm 1)Dn}{z} + \frac{npa}{z} D = o.$$

Но этот случай предполагает

$$(k \pm 1 + pa)n = \text{рац. число},$$

сравнивая с (18) получаем противно условию $n =$ рац. числу.

Предположив $\alpha + k \pm 1 = \alpha - \beta$, $-\beta = k \pm 1$ $\alpha \neq \pm 1$, имели бы

$$D' + \frac{(D \pm 1)Dn}{z} + \frac{np\alpha D}{z} = z^{\nu + \alpha - 1},$$

мы таким образом при условии (19) имели бы для D частное алгебраическое решение

$$\frac{z^{\nu + \alpha}}{(k \pm 1 + p)n + \nu + \alpha}.$$

Но приравнивание нулю следующего коэффициента дало бы $(k \pm p + {} + p\alpha)n =$ рац. числу

Таким образом можем считать, что $\alpha = \pm 1$ и

$$b\left[D' + \frac{(k \pm 1)Dn}{z} + \frac{np}{z}\alpha D\right] + a\left[C' + \frac{kCn}{z}\right] = z^{\nu} + \alpha - 1.$$

Смотря по тому, будет ли соблюдено или нет условие (19)

$$D = z^{-[k \pm p\alpha]n}\left[K\int z^{+[k \pm 1 + p\alpha]n}\left(\frac{Az^{\nu+\alpha} + Bz^{-(k+p\alpha)n}}{z}\right) + L\right]$$

будет иметь форму $A'z^{\nu+\alpha}$ или $A'z^{\nu+\alpha} + Lz^{-(k \pm 1 + p\alpha)n}$.

Следует отметить что при (19) $L = o$, так как трансцендентный член $Lz^{-[k \pm 1 + p\alpha]n}$ должен исчезнуть.

Вторая форма предполагает

$$(k \pm 1 + p\alpha)n = \text{рац. числу}. \qquad (19')$$

Проводя то же исследование для других коэффициентов разложения ϑ, получаем формы

$$Az^{\nu+\alpha} \qquad \text{(I)}$$

$$Az^{\nu+\alpha} + Bz^{-[k \pm j + p\alpha]n} \qquad \text{(II)}$$

последнюю при непременном условии

$$[k \pm j + p\alpha]n = \text{рац. числу}.$$

Взяв же последний коэффициент, будем иметь

$$G' + \frac{(k \pm l)n}{z}G = o,$$

G может быть алгебраическим только при условии

$$(k \pm l)n = \text{ рац. числу},$$

т. е. $k \pm l = o$, т. к. n не может быть рациональным числом. Таким образом $G = \text{const}$.

Форма (I) дает $v = -\alpha = \pm 1$ и тогда $m + 1 = \pm kn = k'n$.

Форма (II) предполагает, что $(k \pm j + \alpha p)n =$ рац. число $= -(\nu \pm 1)$.

Сопоставляя это с условием $\pm m - kn = \nu$ имеем

$$m + 1 + \alpha np = jn.$$

При этом в первом случае $k^1 > o$, во втором $j < o$. В самом деле подстановкой $x^n = z$ интеграл J сводится к

$$\int z^{k-1}(a + bz)^p dz,$$

который согласно § 2 выражается в конечном виде только при $k > o$.

Таким же образом, рассматривая J в форме

$$\int x^{m+np}(ax^{-n}+b)^p\,dx,$$

убеждаемся, что $j < o$.

Пример. Интеграл $\int x^{2\sqrt{2}-1}\left(1+x^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt[3]{5}}dx$

удовлетворяет условиям интегрируемости и его значение

$$\frac{\left(1+x^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt[3]{5}+1}\left[\left(2+\sqrt[3]{5}\right)-\left(1+\sqrt[3]{5}\right)x^{\sqrt{2}}\right]}{\sqrt{2}\left(1+\sqrt[3]{5}\right)\left(2+\sqrt[3]{5}\right)}+C.$$

То же самое относится и к интегралу

$$\int x^{e^2+e-1}(2+3x^{-e})^e\,dx=\frac{(2+3x^e)^{e+1}}{3e(e+1)}+C\,.$$

§ 6. Отброшенный в начале § 4 случай p и n иррациональных, $m=\frac{\nu}{\omega}$ рационально не требует особого исследования, подстановкой $x^{\frac{1}{\omega}}=z$ интеграл приводится к виду

$$\int z^{\nu+\omega-1}(a+bz^{\delta})^p dz=(a+bz^{\delta})^p\,\vartheta,$$

где ϑ рациональная функция z^{δ}.

Мы получаем ууавнение

$$z^{\nu+\omega-1}(a+b\omega)=\vartheta'(a+b\omega)+\frac{p\delta b\vartheta\omega}{z}$$

и исследование этого уравнения ведется с помощью уравнения (15), где положено $\beta=o$; $\alpha=1$.

Остается случай, когда $p=\frac{\alpha}{\beta}$ *рационально, а m, n иррациональны.*

Подстановкой $\qquad a+bx^n=z^{\beta}$

интеграл приводится к виду

$$J=\frac{\beta}{bn}\int\left(\frac{z^{\beta}-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}z^{\alpha+\beta-1}\,dz\,,$$

т. е. к случаю $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ с рациональными m, n и иррациональным или рациональным p.

Пусть сперва $\frac{m+1}{n}$ иррационально. Тогда на основании доказанного в § 2 необходимо и достаточно для интегрируемости в конечном виде, чтобы $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=p=$ рац. числу.

Если же $\frac{m+1}{n}$ рационально, то прилагая признаки Чебышева, получим условие:

1) $p =$ цел. число

2) $\frac{m+1}{n} =$ цел. число

3) $\frac{m+1}{n} + p =$ целое число.

Пример.

Интеграл $\int x^{(3\sqrt{3}-1)} (x^{\sqrt{3}} + 1)^{\frac{1}{2}} dx$ берется в конечном виде, а $\int x^{\sqrt{2}} \left(3 - 5x^{\sqrt{3}}\right)^{3/5} dx$ не берется

§ 7. Окончательный результат представляется в следующем виде: Интеграл дифференциального бинома

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx$$

в случае p иррационального выражается в конечном виде только при следующих условиях:

1) $\frac{m+1}{n}$ целое положит. число,

2) $\frac{m+1}{n} + p$ целое отриц. число,

в случае p рациональном, если $\frac{m+1}{n}$ рационально,

при 1) $\frac{m+1}{n}$ целом числе,

2) $p + \frac{m+1}{n}$ целом,

3) p целом

независимо от того, рациональны или иррациональны m. n. Если же $\frac{m+1}{n}$ иррационально, то только при p *целом положительным числом.*

Ростов на Дону. 1926.

Д. Мордухай-Болтовской.

Résumé.

Les conditions nécessaires et suffisantes de l'exprimabilité de l'intéglale

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx$$

en termes finis au moyen de transcendentes élémentaires sont suivantes:

I) quand p est irrationnel

1) $\frac{m+1}{n}$ est entier et positif ou

2) $\frac{m+1}{n} + p$ est entier et négatif;

II) quand p est rationnel et $\frac{m+1}{n}$ est aussi rationnel, un des nombres $\frac{m+1}{n}$, $p + \frac{m+1}{n}$, p est entier;

III) si $\frac{m+1}{n}$ est irrationnel, p doit être entier et positif,